Metodi Matematici, prova *in itinere* del 17 novembre 2003

Cognome | | Nome | |

Esercizio 1 Calcolare il seguente integrale,
dove Γ è il rettangolo di vertici $0, -10, \ -10 + 2\pi i, \ 2\pi i$ orientato in senso antiorario:

$$\oint_\Gamma \frac{2}{e^{z+1} + i/3}\, dz = \boxed{}$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale lungo la circonferenza Γ di centro 0 e raggio 2

$$\oint_\Gamma \left(\frac{e^{-\pi z}}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-3} \right) dz = \boxed{}$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale lungo la circonferenza Γ di centro 0 e raggio 5 orientata in senso antiorario

$$\oint_\Gamma \frac{1}{1+2z} \sin\left(\frac{2 - \pi z}{2z} \right) dz = \boxed{}$$

Esercizio 4 Mediante metodi di analisi complessa calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{3(\cos x + i \sin x)} \cos x \, dx = \boxed{}$$

Esercizio 5 Calcolare l'integrale nel senso del valor principale

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + 3ix}\, dx = \boxed{}$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+5}{(x^2 + 10x + 26)(x + 5 - 6i)^2}\, dx = \boxed{}$$

Esercizio 7 Si consideri la funzione f, 2π-periodica, dispari definita da

$$f(t) = 2(\pi - t) \qquad 0 < t < \pi.$$

Dopo aver verificato che è possibile sviluppare la funzione in serie di Fourier, scrivere lo sviluppo in forma trigonometrica.

$$S(t) = \boxed{}$$

Utilizzando quindi l'uguaglianza di Parseval determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \boxed{}$$

Esercizio 8 Si consideri la funzione f, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 7t & -\pi < t < 0 \\ \frac{7\pi}{2} & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Dopo aver verificato che è possibile sviluppare la funzione in serie di Fourier, scriverne lo sviluppo ((*) in forma trigonometrica).

$$S(t) = \boxed{}$$

Studiare la convergenza puntuale della serie ed utilizzando in particolare il risultato per $t = 0$ determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \boxed{}$$

Esercizio 9 Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z\, e^{\frac{2}{z}}}{4 + z^2}.$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità, classificarle, calcolare i relativi residui e (*) scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a $z = 0$, precisando l'insieme di convergenza.

Esercizio 10 Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cos \frac{9}{z}}{(z+9)(z-\frac{9}{2})}.$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità, classificarle, calcolare i relativi residui e (*) scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a z_∞ centrato in $z = 0$, precisando l'insieme di convergenza.

Esercizio 11 L'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\, 2^n} \left(\frac{z-3}{z-4i} \right)^n \quad \text{è} \quad A : \boxed{}.$$

Quale è il comportamento della serie sulla frontiera di A?

Esercizio 12 Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\sqrt{2} \cos 2z + i \sin 2z = -\frac{1}{2}; \qquad z = \boxed{}$$

Esercizio 13 (*) Determinare la $f = u + iv$ olomorfa sapendo che $f(3+2i) = 0$ e

$$u(x,y) = (x-3)^3 - 3(x-3)(y-2)^2 \qquad f(z) = \boxed{}$$

Valutazione degli esercizi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15