

1) Senza tralasciare di studiare il comportamento sul bordo, determinare l'insieme  $A \subset \mathbf{C}$  dove converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3} \left( \frac{z - 4i}{z + 5} \right)^n.$$

2) Risolvere in  $\mathbf{C}$  l'equazione

$$7^z = -9i.$$

3) Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{4}{z^2}}}{(z^2 - 16)(z^2 + 25)}.$$

Determinare le singolarità della  $f$ , classificarle e calcolare il relativo residuo. Scrivere quindi lo sviluppo di Laurent della  $f$  relativo a  $z_{\infty}$  centrato in  $z = 0$ , precisandone l'insieme di convergenza.

4) Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z \sin\left(\frac{4}{z^2}\right)}{z^2 + 25}.$$

Determinare le singolarità della  $f$ , classificarle e calcolare il relativo residuo. Scrivere quindi lo sviluppo di Laurent della  $f$  relativo a  $z = 0$ , precisandone l'insieme di convergenza.

5) Calcolare

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(e^{3z} + 1)(e^{4iz} - 1)} dz$$

dove  $\Gamma$  è la circonferenza di centro l'origine e raggio  $R = 3$  orientata positivamente

6) Utilizzando il Lemma di Jordan, calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{3ix}}{(x^2 + 9)(x - 6i)} dx.$$

7) Utilizzando il Lemma di Jordan calcolare il seguente integrale in valore principale

$$\text{VP} \int_{\mathbf{R}} \frac{\sin(2x)}{(x - 1)(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

8) Utilizzando metodi di Analisi Complessa calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5 + 2 \cos t} dt \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Dedurre dal risultato precedente i valori dei due integrali definiti

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 + 2 \cos t} dt, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{5 + 2 \cos t} dt.$$

9) Calcolare con metodi di Analisi Complessa il seguente integrale definito

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(x - 5i)^2(x^2 - 6x + 18)} dx.$$

10) Determinare la funzione olomorfa  $f = u + iv$  tale che  $f(0) = 0$  e

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 8xy.$$

Posto poi  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ , determinare le singolarità della  $g$ , classificarle e calcolare i relativi residui.