

METODI MATEMATICI

PRIMA PROVA IN ITINERE del 15 novembre 2002

COGNOME e NOME

NUMERO di MATRICOLA

- 1) Determinare l'insieme aperto di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 1) 2^n} \left(\frac{z}{z - 2i} \right)^n$$

e studiare il comportamento della serie nei punti della frontiera che appartengono all'asse delle y .

- 2) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)^2} e^{(3iz - 4)n}$$

precisando se è aperto o chiuso.

- 3) Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$(-8i)^z = 4 - 3i.$$

- 4) Determinare i valori di $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\tan 2z = 3i.$$

- 5) Determinare la funzione olomorfa $f = u + iv$ sapendo che $f(0, 0) = 0$ e

$$u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y.$$

- 6) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z - 1}{z^2 + 1} e^{\frac{1}{z}}.$$

Senza tralasciare z_{∞} , determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a $z = 0$, precisando l'insieme di convergenza.

- 7) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{(z^4 + 2) \sin z}{(z - i)^2}.$$

Senza tralasciare z_∞ , determinare le singolarità, calcolare i relativi residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a z_∞ centrato in $z = 0$, precisando l'insieme di convergenza.

8) Utilizzando opportunamente il Teorema dei residui, calcolare

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2 + x}{x^6 - 1} dx.$$

NOTA: Attenzione a calcolare correttamente le radici del denominatore.

9) Utilizzando opportunamente il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{3 + 2 \cos x} dx.$$

10) Utilizzando il Lemma di Jordan ed il Teorema dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{x^2 + 2x + 10} dx.$$

11) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t + \pi & -\pi \leq t < 0 \\ \pi & 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della f , studiarne la convergenza puntuale e valutare la somma della serie numerica che si ottiene ponendo $t = 0$ nello sviluppo di Fourier.

12) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 2π -periodica, pari, definita da

$$f(t) = e^{|t|} \quad t \in] -\pi, \pi].$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier della f in forma trigonometrica, studiarne la convergenza puntuale ed uniforme e utilizzando l'identità di Parseval valutare la somma di una opportuna serie numerica.