Metodi Matematici, prova *in itinere*

13 novembre 2006

Cognome

Nome

***Tempo a disposizione:* <u>*2 ore*</u>**

***È obbligatorio svolgere* <u>*l'esercizio 1 e l'esercizio 2*</u>**

Esercizio 1 Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{z^2 \sin\left(\frac{3}{z}\right)}{(z-2)(z+2i)}$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità di f, classificarle e calcolare i relativi residui.

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodico definita da

$$f(t) = \begin{cases} 2 & t \in [-\pi, 0[\\ -1 & t \in [0, \pi[\end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier scriverne lo sviluppo. Utilizzare quini l'uguaglianza di Parseval per determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

<u>Nota:</u> i coefficienti dello sviluppo di indice pari sono nulli.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale lungo la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 2, orientata positivamente

$$\int_\Gamma \left(\frac{z \sin z}{(z-i)^2} + e^{2z}\right) dz$$

Esercizio 4 Senza trascurare di studiare il comportamento sul bordo, determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \log n} \left(\frac{z-2}{z+4i}\right)^n$$

Esercizio 5 Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sin(2z) + i\cos(2z) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 6 Al variare di $n \in \mathbb{N}$ determinare il valore dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + \cos t}\, dt,$$

utilizzando metodi di analisi complessa.

Valutazione degli esercizi

1	2	3	4	5	6	Totale

Metodi Matematici, prova *in itinere*
13 novembre 2006

Cognome | |

Nome | |

Tempo a disposizione: ***<u>2 ore</u>***
È obbligatorio svolgere ***<u>l'esercizio 1 e l'esercizio 2</u>***

Esercizio 1 Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{z^2 \sin\left(\frac{5}{z}\right)}{(z-3)(z+3i)}$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità di f, classificarle e calcolare i relativi residui.

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodico definita da

$$f(t) = \begin{cases} 4 & t \in [-\pi, 0[\\ -2 & t \in [0, \pi[\end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier scriverne lo sviluppo. Utilizzare quini l'uguaglianza di Parseval per determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

<u>Nota:</u> i coefficienti dello sviluppo di indice pari sono nulli.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale lungo la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 2, orientata positivamente

$$\int_\Gamma \left(\frac{z \sin z}{(z+i)^2} + e^{3z} \right) dz$$

Esercizio 4 Senza trascurare di studiare il comportamento sul bordo, determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \log n} \left(\frac{z-4}{z+8i} \right)^n$$

Esercizio 5 Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sin(4z) + i\cos(4z) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esercizio 6 Al variare di $n \in \mathbb{N}$ determinare il valore dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{3 + \cos t}\, dt,$$

utilizzando metodi di analisi complessa.

Valutazione degli esercizi

1	2	3	4	5	6	Totale

METODI MATEMATICI, PROVA *in itinere*

13 NOVEMBRE 2006

COGNOME | |

NOME | |

Tempo a disposizione: ***2 ore***

È obbligatorio svolgere l'esercizio 1 e l'esercizio 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{z^2 \sin\left(\frac{6}{z}\right)}{(z-4)(z+4i)}$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità di f, classificarle e calcolare i relativi residui.

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodico definita da

$$f(t) = \begin{cases} 6 & t \in [-\pi, 0[\\ -3 & t \in [0, \pi[\end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier scriverne lo sviluppo. Utilizzare quini l'uguaglianza di Parseval per determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Nota: i coefficienti dello sviluppo di indice pari sono nulli.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale lungo la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 4, orientata positivamente

$$\int_\Gamma \left(\frac{z \sin z}{(z-2i)^2} + e^{4z} \right) dz$$

Esercizio 4 Senza trascurare di studiare il comportamento sul bordo, determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \log n} \left(\frac{z+2}{z-4i} \right)^n$$

Esercizio 5 Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sin(6z) + i\cos(6z) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 6 Al variare di $n \in \mathbb{N}$ determinare il valore dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{4 + \cos t}\, dt,$$

utilizzando metodi di analisi complessa.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI

1	2	3	4	5	6	Totale

Metodi Matematici, prova *in itinere*
13 novembre 2006

Cognome | |

Nome | |

Tempo a disposizione:* *2 ore
È obbligatorio svolgere l'esercizio 1 e l'esercizio 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{z^2 \sin\left(\frac{8}{z}\right)}{(z-5)(z+5i)}$$

Senza trascurare z_∞, determinare le singolarità di f, classificarle e calcolare i relativi residui.

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodico definita da

$$f(t) = \begin{cases} 8 & t \in [-\pi, 0[\\ -4 & t \in [0, \pi[\end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier scriverne lo sviluppo. Utilizzare quini l'uguaglianza di Parseval per determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Nota: i coefficienti dello sviluppo di indice pari sono nulli.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale lungo la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 4, orientata positivamente

$$\int_\Gamma \left(\frac{z \sin z}{(z+2i)^2} + e^{5z} \right) dz$$

Esercizio 4 Senza trascurare di studiare il comportamento sul bordo, determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \log n} \left(\frac{z+4}{z-8i} \right)^n$$

Esercizio 5 Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sin(8z) + i\cos(8z) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esercizio 6 Al variare di $n \in \mathbb{N}$ determinare il valore dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5 + \cos t}\, dt,$$

utilizzando metodi di analisi complessa.

Valutazione degli esercizi

1	2	3	4	5	6	Totale