

METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 5 FEBBRAIO 2007

COGNOME e NOME

NUMERO DI MATRICOLA

- 1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\chi_{[-2,0]}(t) - \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\chi_{[0,2]}(t).$$

- Tracciare il grafico della funzione f .
- Verificare che $f \in L^1(\mathbf{R})$.
- Verificare inoltre che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $t^n f \in L^1(\mathbf{R})$.
- Dedurre da b) e c) che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $\hat{f} \in C^n(\mathbf{R})$.
- Calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.

- 2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{t}{(t + 3i)^2}.$$

- Verificare che $f \in L^2(\mathbf{R})$.
- Calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.
- Utilizzare il Teorema di Plancherel per calcolare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 + 9)^2} dt.$$

- 3) Utilizzando il Teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione della funzione

$$f(t) = \chi_{[-2,2]}(t) * \left(\frac{d}{dt} e^{-2|t|}\right).$$

- 4) Utilizzando la definizione, calcolare l'espressione della funzione

$$f(t) = \frac{2t}{t^2 + 9} \chi_{[-3,3]}(t) * \chi_{[-3,3]}(t),$$

precisando l'ampiezza del supporto di f .

- 5) Dopo aver verificato che ciascuna delle seguenti funzioni è una trasformata di Laplace in un opportuno semipiano del tipo $\operatorname{Re} s > \lambda$, determinare la corrispondente funzione $F \in E$:

a) $f_1(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 - 7s + 12}$.

b) $f_2(s) = \log\left(\frac{s^2 + 4}{s^2 - 9}\right)$.

c) $f_3(s) = \frac{1}{s(s^2 - 8s + 41)}$.

d) $f_4(s) = \frac{2s + 3}{(s^2 - 5s + 6)^2}$.

- 6) Risolvere il seguente problema di Cauchy in avanti (per $t > 0$)

$$\begin{cases} u'''(t) + 7u''(t) + 12u'(t) = 9H(t), \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(0) = 3. \end{cases}$$