METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 4 FEBBRAIO 2009

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da

$$f(t) = 2(t+2)\chi_{[-2,0]}(t) + (4-t^2)\chi_{[0,2]}(t).$$

a) Tracciare il grafico della funzione f e verificare che f è $\mathcal{F}$–trasformabile.
b) Determinare la principali proprietà di $\hat{f}$ prima di calcolarla.
c) Calcolare l'espressione esplicita di $\hat{f}$, verificando le conclusioni del punto precedente.

2) Utilizzando le relazioni fondamentali, calcolare la $\mathcal{F}$–Trasformata della $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{4}{4+t^2} - \frac{9}{9+t^2}\right).$$

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, definita da

$$f(t) = \frac{t}{(t+4i)^2}.$$

a) Verificare che f appartiene a $L^2(\mathbf{R})$ e calcolare quindi $\hat{f}$.
b) Utilizzare il Teorema di Plancherel e i risultati del punto precedente per calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+16)^2}\, dt.$$

4) Utilizzando la Trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di

$$f(t) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t+3i}\right)\right] * \chi_{[-1,1]}(t).$$

5) Dopo aver precisato per ciascuna delle seguenti funzioni f_i il semipiano di convergenza in cui essa è la trasformata di Laplace di una $F_i \in E$, calcolare l'espressione esplicita delle F_i.

$$f_1(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 - 15s + 26}, \qquad f_2(s) = \frac{s+2}{(s-2)(s+4)(s-6)(s+8)},$$

$$f_3(s) = \frac{\log s}{s}, \qquad f_4(s) = \frac{1}{(s-7)^8}.$$

6) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π–periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} (t+\pi) & -\pi < t \le 0 \\ -t & 0 < t \le \pi. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che la f è sviluppabile in serie di Fourier, calcolare il suo sviluppo in serie trigonometrica. Studiare quindi la convergenza **puntuale** della serie alla funzione ed utilizzare il risultato in $t = 0$, per calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{n^2}$.