

METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 4 FEBBRAIO 2008

COGNOME e NOME

NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(t) = (\sin t) \chi_{[-\pi, 0]}(t)$.

- Tracciare il grafico della funzione f e verificare che $f \in L^1(\mathbf{R})$.
- Verificare inoltre che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $t^n f \in L^1(\mathbf{R})$ e dedurre che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $\hat{f} \in C^n(\mathbf{R})$.
- Calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.

2) Si consideri la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ definita da $f(t) = \frac{1}{(t + 4i)^2(t + 3i)}$.

- Verificare che $f \in L^2(\mathbf{R})$ e calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.
- Utilizzare il Teorema di Plancherel per calcolare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 16)^2(t^2 + 9)} dt.$$

3) **Con la definizione**, calcolare l'espressione di $f(t) = \chi_{[-1, 1]}(t) * t^3 \chi_{[-2, 2]}(t)$.

4) Calcolare la \mathcal{L} -trasformata delle seguenti funzioni, **precisando per ciascuna** λ_F :

a) $F_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ -3 & 0 \leq t < 2 \\ 2 & 2 \leq t < 4 \end{cases}$ **periodica con** $T = 4$.

b) $F_2(t) = H(t) t e^{3t}$.

c) $F_3(t) = H(t - 3) \ln(t - 3) e^{3t}$.

d) $F_4(t) = H(t) \frac{e^{4t} - e^{2t}}{t}$.

5) Utilizzando la \mathcal{L} -trasformata, risolvere il seguente problema di Cauchy per $t > 0$

$$U''(t) - 3U'(t) + 2U(t) = H(t)[e^t - e^{2t}], \quad U(0) = 1, \quad U'(0) = 3.$$

6) Si consideri la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [-\pi, 0[\\ \frac{4}{\pi}(t - \pi) & \text{se } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier, darne lo sviluppo in forma trigonometrica. Discutere la convergenza puntuale della serie alla funzione e utilizzare la convergenza in $t = 0$ per determinare il valore della somma della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2}.$$