METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 4 FEBBRAIO 2008

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(t) = (\sin t)\, \chi_{[0,\pi]}(t)$.

a) Tracciare il grafico della funzione f e verificare che $f \in L^1(\mathbf{R})$.
b) Verificare inoltre che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $t^n f \in L^1(\mathbf{R})$ e dedurne che $\forall n \in \mathbf{N}$ risulta $\hat{f} \in C^n(\mathbf{R})$.
c) Calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.

2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definita da $f(t) = \dfrac{1}{(t-2i)^2(t+5i)}$.

a) Verificare che $f \in L^2(\mathbf{R})$ e calcolare esplicitamente $\hat{f}(\omega)$.
b) Utilizzare il Teorema di Plancherel per calcolare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+4)^2(t^2+25)}\, dt.$$

3) **Con la definizione**, calcolare l'espressione di $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t) * t^2\chi_{[-2,2]}(t)$.

4) Calcolare la $\mathcal{L}$–trasformata delle seguenti funzioni, **precisando per ciascuna** λ_F:

a) $F_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 2 & 0 \le t < 1 \\ -3 & 1 \le t < 2 \end{cases}$ **periodica con** $T = 2$.
b) $F_2(t) = H(t)\, t\, e^{2t}$.
c) $F_3(t) = H(t-2)\ln(t-2)\, e^{2t}$.
d) $F_4(t) = H(t)\dfrac{e^{3t} - e^{2t}}{t}$.

5) Utilizzando la $\mathcal{L}$–trasformata, risolvere il seguente problema di Cauchy per $t > 0$

$$U''(t) - 5U'(t) + 4U(t) = H(t)[e^t - e^{4t}], \quad U(0) = 1,\ U'(0) = 5.$$

6) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π–periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \in [-\pi, 0[\\ \dfrac{6}{\pi}(t-\pi) & \text{se } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier, darne lo sviluppo in forma trigonometrica. Discutere la convergenza puntuale della serie alla funzione e utilizzare la convergenza in $t = 0$ per determinare il valore della somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-)^n}{n^2}$.