METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 2 FEBBRAIO 2009

COGNOME e NOME   NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da
$$f(t) = (t+3)\chi_{[-3,3]}(t) + 2(6-t)\chi_{[3,6]}(t).$$

a) Tracciare il grafico della funzione f e verificare che f è $\mathcal{F}$–trasformabile.
b) Determinare la principali proprietà di $\hat{f}$ prima di calcolarla.
c) Calcolare l'espressione esplicita di $\hat{f}$, verificando le conclusioni del punto precedente.

2) Utilizzando le relazioni fondamentali, calcolare la $\mathcal{F}$–Trasformata della $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(e^{-x^2} - 3e^{-9x^2} \right) dx.$$

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, definita da
$$f(t) = \frac{1}{(t+4i)(t+5i)}.$$

a) Verificare che f appartiene a $L^2(\mathbf{R})$ e calcolare quindi $\hat{f}$.
b) Utilizzare il Teorema di Plancherel e i risultati del punto precedente per calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+16)(t^2+25)}\, dt.$$

4) Utilizzando la Trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$f(t) = \frac{1}{t-4i} * \frac{1}{t^2+9}.$$

5) Dopo aver precisato per ciascuna delle seguenti funzioni f_i il semipiano di convergenza in cui essa è la trasformata di Laplace di una $F_i \in E$, calcolare l'espressione esplicita delle F_i.
$$f_1(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 - 9s + 18}, \qquad f_2(s) = \frac{s-3}{(s+2)^2(s-4)^2},$$
$$f_3(s) = \log\left(\frac{s+5}{s-3}\right), \qquad f_4(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{(s+2)^{5/2}}\, e^{-s}.$$

6) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π–periodica, definita da
$$f(t) = \begin{cases} 2(t+\pi) & -\pi < t \le 0 \\ (t-\pi) & 0 < t \le \pi. \end{cases}$$
Dopo aver verificato che la f è sviluppabile in serie di Fourier, calcolare il suo sviluppo in serie trigonometrica. Studiare quindi la convergenza **puntuale** della serie alla funzione ed utilizzare il risultato in $t = 0$, per calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n - 1}{n^2}$.