

METODI MATEMATICI
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 2 FEBBRAIO 2009

COGNOME e NOME

NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$f(t) = 2(t+4)\chi_{[-4,-2]}(t) + (2-t)\chi_{[-2,2]}(t).$$

- Tracciare il grafico della funzione f e verificare che f è \mathcal{F} -trasformabile.
- Determinare la principali proprietà di \hat{f} prima di calcolarla.
- Calcolare l'espressione esplicita di \hat{f} , verificando le conclusioni del punto precedente.

2) Utilizzando le relazioni fondamentali, calcolare la \mathcal{F} -Trasformata della $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$f(t) = \int_{-\infty}^t (e^{-x^2} - 2e^{-4x^2}) dx.$$

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, definita da

$$f(t) = \frac{1}{(t+2i)(t+3i)}.$$

- Verificare che f appartiene a $L^2(\mathbf{R})$ e calcolare quindi \hat{f} .
- Utilizzare il Teorema di Plancherel e i risultati del punto precedente per calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)} dt.$$

4) Utilizzando la Trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di

$$f(t) = \frac{1}{t+3i} * \frac{1}{t^2+4}.$$

5) Dopo aver precisato per ciascuna delle seguenti funzioni f_i il semipiano di convergenza in cui essa è la trasformata di Laplace di una $F_i \in E$, calcolare l'espressione esplicita delle F_i .

$$f_1(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 - 7s + 12}, \quad f_2(s) = \frac{s+2}{(s-1)^2(s+3)^2},$$
$$f_3(s) = \log\left(\frac{s-2}{s+4}\right), \quad f_4(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{(s-2)^{3/2}} e^{-s}.$$

6) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} (t+\pi) & -\pi < t \leq 0 \\ 2(t-\pi) & 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che la f è sviluppabile in serie di Fourier, calcolare il suo sviluppo in serie trigonometrica. Studiare quindi la convergenza **puntuale** della serie alla funzione ed utilizzare il risultato in $t=0$, per calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.