

# I DUE TEOREMI CHE MANCANO SUL LIBRO

ULISSE STEFANELLI

ABSTRACT. Ecco le dimostrazioni dei due teoremi che non si trovano sul testo di Canuto e Tabacco.

## 1. OGNI SUCCESIONE AMMETTE UNA SOTTOSUCCESIONE MONOTONA

**Teorema 1.1.** *Ogni successione ammette una sottosuccessione monotona.*

*Dimostrazione del Teorema 1.1.* Sia data la successione  $\{x_n\}$ , distinguiamo due casi mutuamente esclusivi:

- (a) l'insieme  $\{x_n\}$  contiene almeno un valore che è immagine di infiniti indici  $\{n_k\}$ ,
- (b) nessun punto di  $\{x_n\}$  è immagine di infiniti indici.

Nel caso (a) basterà estrarre  $\{x_{n_k}\}$  per ottenere una sottosuccessione costante e quindi monotona. Il caso (b) è più delicato e richiede una costruzione. Definiamo

$$n_0 = 0, N_0 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0\}.$$

Dato (b) abbiamo che  $N_0$  è un insieme infinito di indici. In particolare, almeno uno tra i seguenti due insiemi

$$N_0^+ = \{n \in N_0 : x_n > x_{n_0}\}, N_0^- = \{n \in N_0 : x_n < x_{n_0}\}$$

è necessariamente un insieme infinito di indici. Ora

- se  $N_0^+$  è infinito poniamo:  $n_1 = \min N_0^+$ ,  $b_1 = 1$ ,  $N_1 = N_0^+$ ,
- se  $N_0^-$  è infinito poniamo:  $n_1 = \min N_0^-$ ,  $b_1 = -1$ ,  $N_1 = N_0^-$ ,

(se entrambi sono infiniti facciamo una qualsiasi tra le due scelte). Ora definiamo

$$N_1^+ = \{n \in N_1 : x_n > x_{n_1}\}, N_1^- = \{n \in N_1 : x_n < x_{n_1}\}.$$

Dato (b) avremo che almeno uno tra  $N_1^+$  e  $N_1^-$  è infinito:

- se  $N_1^+$  è infinito poniamo:  $n_2 = \min N_1^+$ ,  $b_2 = 1$ ,  $N_2 = N_1^+$ ,
- se  $N_1^-$  è infinito poniamo:  $n_2 = \min N_1^-$ ,  $b_2 = -1$ ,  $N_2 = N_1^-$ ,

(se entrambi sono infiniti facciamo una qualsiasi tra le due scelte). Procedendo in questa maniera possiamo costruire una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  ed una successione ausiliaria  $\{b_k\}$  tali che

$$b_k = 1 \Rightarrow x_{n_m} > x_{n_k} \quad \text{per ogni } m > k, \quad (1.1)$$

$$b_k = -1 \Rightarrow x_{n_m} < x_{n_k} \quad \text{per ogni } m > k. \quad (1.2)$$

La successione  $\{b_k\}$  prenderà infinite volte il valore 1 oppure infinite volte il valore  $-1$  (o infinite volte entrambi). Quindi almeno uno dei due insiemi di indici

$$M_1 = \{k \in \mathbb{N} : b_k = 1\}, \quad M_{-1} = \{k \in \mathbb{N} : b_k = -1\},$$

è infinito. Poniamo lo sia  $M_1 = \{k_1, k_2, k_3 \dots\}$ . Allora, per (1.1), la sottosuccessione  $\{x_{n_{k_m}}\}$  è strettamente crescente. Viceversa se  $M_{-1} = \{k_1, k_2, k_3 \dots\}$  è infinito allora la sottosuccessione  $\{x_{n_{k_m}}\}$  è strettamente decrescente per (1.2).  $\square$

Dal Teorema 1.1 scende come corollario il Teorema di Bolzano-Weierstraß.

**Teorema 1.2** (Bolzano-Weierstraß). *Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.*

*Dimostrazione di Bolzano-Weierstraß.* Sia  $\{x_n\}$  una successione limitata. Per il Teorema 1.1 essa ammette una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  monotona. D'altra parte  $\{x_{n_k}\}$  è essa stessa limitata. Quindi  $\{x_{n_k}\}$  converge per via del Teorema fondamentale delle successioni monotone.  $\square$

## 2. IL TEOREMA 'PONTE'

**Teorema 2.1** (Teorema 'ponte'). *Sia  $f : \text{dom}f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  tali che  $I_r(c) \setminus \{c\} \subset \text{dom}f$  per qualche  $r > 0$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$ ,
- (ii)  $\forall \{x_n\} \subset \text{dom}f \setminus \{c\}, x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \ell$ .

Il Teorema 'ponte' permette di trasferire i risultati che abbiamo dimostrato circa i limiti di successioni ai corrispondenti limiti di funzioni. Tra questi risultati ricordiamo almeno: unicità del limite, permanenza del segno, algebra dei limiti, carabinieri, limiti di successioni monotone.

*Dimostrazione del Teorema 'ponte'.* Per fissare le idee ci concentriamo solo sul sottocaso  $\ell \in \mathbb{R}$ . I restanti casi  $\ell = \pm\infty$  si otterranno mediante semplici modifiche.

Prova di (i)  $\Rightarrow$  (ii): si fissi  $\varepsilon > 0$ . Da (i) scende che esiste  $\delta_\varepsilon \in (0, r)$  tale che

$$x \in I_{\delta_\varepsilon}(c) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell). \quad (2.1)$$

Data  $\{x_n\} \in \text{dom}f \setminus \{c\}$  con  $x_n \rightarrow c$  abbiamo che  $x_n \in I_{\delta_\varepsilon}(c)$  definitivamente. Quindi, dalla (2.1),  $f(x_n) \in I_\varepsilon(\ell)$  definitivamente ed abbiamo mostrato (ii).

Prova di (ii)  $\Rightarrow$  (i): per assurdo si abbia che  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq \ell$ . Questo vuol dire che

$$\exists \bar{\varepsilon} > 0 \forall \delta \in (0, r) \exists x_\delta : 0 < |x_\delta - c| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}. \quad (2.2)$$

Scegliamo  $\delta = 1/n$  e corrispondentemente troviamo  $x_n := x_\delta$  che soddisfi (2.2). Allora  $0 < |x_n - c| < 1/n$ , cioè  $\{x_n\} \subset \text{dom}f \setminus \{c\}$  e  $x_n \rightarrow c$ . Tuttavia  $|f(x_n) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$ , cioè  $f(x_n) \not\rightarrow \ell$ . Questo contraddice (ii): assurdo!  $\square$